

Date : / /

Subject:

## المحاضرة السادسة

المعادلة غير المتجانسة للذبذبات الحرة للوتر:

أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t); 0 < x < l \quad (1)$$

والحققت للشروط الابتدائية:

$$u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); 0 < x < l \quad (2)$$

والشروط الحدية المتجانسة:

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0; t > 0 \quad (3)$$

سوف نبحث عن حل المعادلة من الشكل:

$$u(x, t) = z(x, t) + w(x, t) \quad (4)$$

علماً أن  $w(x, t)$  هي عبارة عن حل المعادلة المتجانسة المتوافقة للمعادلة

المعطاة والحققت للشروط الابتدائية (2) والشروط الحدية (3)

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{n\pi}{l} at + D_n \sin \frac{n\pi}{l} at) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (5)$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (6)$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

أما  $z(x, t)$  فهو عبارة عن الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

أي هو الحل الذي يحقق المعادلة (1) والشروط الحدية الصغرى

(3) والشروط الابتدائية الصغرى:

$$z(x, 0) = 0, z_t(x, 0) = 0; 0 < x < l \quad (7)$$

سوف نبحث عن الحل بالشكل الآتي:

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (8)$$



Date : / /

Subject:

باعتبار  $t$  عند ذلك كباراً متروكين الدالة  $f(x, t)$  ينبغي أن نضع

الدالة  $T_n(t)$  التابعة لـ  $t$  فقط :

نضع الدالة  $f(x, t)$  والشروط الابتدائية بصورة سلاسل فورييه

على الشكل التالي :

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

باشتقاق العلاقة (8) بالنسبة لـ  $t$

$$v_t = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (8)$$

$$w_t = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$v_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x\pi}{l} \right) T_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$w_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} - \left( \frac{x\pi}{l} \right)^2 T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

نبدل هذه القيم في المعادلة التفاضلية (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n''(t) + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

وبالمطابقة نحصل على :

$$T_n''(t) + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (9)$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من المراتبة الثانية وخطية .



Date : / /

Subject:

من الشرط الابتدائي (7) والعلاقة (8) حصل على الشروط الابتدائية الصغرية  
الآتية :

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \Rightarrow T_n(0) = 0$$

من (7) و (8) حصل على :

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \Rightarrow T_n'(0) = 0 \quad n=1, 2, \dots \quad (10)$$

وهذا ان الشرط الابتدائيان يحددان حل المعادلة (10)

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t) = 0$$

$$\ell^2 + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow \ell^2 = -\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 \Rightarrow \ell = \pm \frac{n\pi a}{\ell} \quad \text{المعادلة المخيرة}$$

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \quad (11)$$

لإيجاد الحل للمعادلة غير المتجانسة (9) نضع طريقة تحويل التوابل وذلك  
كما يلي :

$$A_n' \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + B_n' \sin \frac{n\pi a}{\ell} t = 0$$

$$A_n' \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \sin \frac{n\pi a}{\ell} t + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) B_n' \cos \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) t =$$

$$F_n(t)$$

لحل هذه المعادلات دناه مقادير الشروط (10) المرافقة حصل على  $A_n, B_n$   
بذلك قيم هذه التوابل في العلاقة (11) حصل على الشكل الآتي :

$$T_n(t) = \frac{\ell}{n\pi a} \int_0^t \sin \left[ \frac{n\pi a}{\ell} (t - \tau) \right] F_n(\tau) d\tau$$

نبدل  $T_n(t)$  بما بدأولها من العلاقة (8) فنحصل على الحل الخاص  
المطلوب :



Date : / /

Subject: .....

في التبيينات العلمية من الحالة المعروفة بعضاً بالمتور

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos \frac{n\pi}{l} at + D_n \sin \frac{n\pi}{l} at) \sin \frac{n\pi}{l} x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

علماً أن

$$T_n(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^l \sin \left[ \frac{n\pi a}{l} (t-\tau) \right] f_n(\tau) d\tau \quad \text{حيث}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

المسألة العامة الحديثة الأولى حول المعادلة إلى معادلة صيغة شروط

صيغة صغرية :

نصف المسألة : أو حول المعادلة .

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) ; 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية

$$u(x,0) = \phi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x); 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

$$u(0,t) = u_1(t), u(l,t) = u_2(t) \quad \text{إذا } t > 0 \quad (3)$$

الحل : سوف نبحث عن حل من الشكل

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t) \quad (4)$$

علماً أن  $U(x,t)$  دالة متجانسة صيغة وهي عبارة عن الخراف الدالة

$$U(x,t) \text{ من دالة معلومة}$$

فنتق العلاقة (4) مرش بالنسبة  $x$  ومرش بالنسبة  $t$  ونبدل في (1)

$$U_{tt} = U_{xx}(x,t) + v_{tt}(x,t) \quad (5)$$

$$U_{tt} = U_{xx}(x,t) + v_{tt}(x,t)$$



Date : / /

Subject: \_\_\_\_\_

$$u_x = u_x(x, t) + v_x(x, t)$$

$$u_{xx} = u_{xx}(x, t) + v_{xx}(x, t)$$

$$u_{tt} + v_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + \alpha^2 v_{xx} + f(x, t)$$

$$v_{tt} = \alpha^2 v_{xx} + [\alpha^2 u_{xx} - u_{tt} + f(x, t)]$$

$$v_{tt} = \alpha^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t) \quad (5)$$

وبالتالي حصل على معادلة جديدة تصف العلاقة (5) وحقق

الشروط الابتدائية الجديدة الناتجة من العلاقة (2), (4).

$$u(x) = u(x, 0) + v(x, 0) \Rightarrow v(x, 0) = u(x) - u(x, 0) = \bar{v}(x)$$

من (2), (4) نجد

$$\psi(x) - u(x, 0) + v(x, 0) \Rightarrow \bar{\psi}(x) = \psi(x) - u(x, 0) = \bar{v}(x) \quad (6)$$

والشروط الحدية تأخذ الشكل الآتي من (3), (4)

$$\star M_1(t) = u(0, t) + v(0, t) \Rightarrow v(0, t) = M_1(t) - u(0, t) = \bar{M}_1(t)$$

$$\star M_2(t) = u(l, t) + v(l, t) \Rightarrow v(l, t) = M_2(t) - u(l, t) = \bar{M}_2(t)$$

ختار الدالة  $u(x, t)$  بحيث يكون  $\bar{M}_1(t) = 0, \bar{M}_2(t) = 0$

$$u(x, t) = M_1(t) + \frac{x}{l} [M_2(t) - M_1(t)]$$

وبالتالي حصل على شروط حدية هوموجينية

$$v(0, t) = 0, v(l, t) = 0 \quad (7)$$

أي وصلنا إلى مسألة جديدة جديدة (5), (6), (7) وشروط حدية هوموجينية

**ملاحظة:** إذا انحصرت الشروط الحدية في الشكل الآتي.

$$u(0, t) = M_1(t) \quad u_x(l, t) = M_2(t)$$

ففي هذه الحالة نأخذ الدالة  $[u(x, t) = M_1(t) + x M_2(t)]$



Date : / /

Subject: .....

والمجموع يبدأ من أي  $x_0$  حتى  $\infty$  ثم نبدل كل  $n$  بـ  $(\frac{n}{2})$

**المسألة الحديثة ذات عدم التباينات المستقرة زعنياً :**

إن للمسألة الحديثة ذات عدم التباينات المستقرة زعنياً أي عندما

لا تتحقق الشروط الحديثة والطرف الآخر للمعادلة مع الزمن :

والمسألة ناهية الشكل الآتي :

عني حل المعادلة :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x); 0 < x < l \quad (1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = \phi(x), u_x(x, 0) = \psi(x); 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

والشروط

$$u(0, t) = u_1; u(l, t) = u_2; t \geq 0 \quad (3)$$

سوف نبحث عن حل في صورة المجموع

$$u(x, t) = U(x) = v(x, t) \quad (4)$$

علماً أن  $U(x)$  الحالة المستقرة للوتر المعزلة بالشروط

$$\left. \begin{aligned} &2 U'' + f(x) = 0 \\ &U(0) = u_1, U(l) = u_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

و  $v(x, t)$  الخراف عند الحالة المستقرة وهذه الدالة تتبدل من

$$v_{tt} = 2 v_{xx} \quad \text{المسألة}$$

بالشروط الابتدائية (ف) (2)، (4)

$$\phi(x) = U(x) + v(x, 0) \Rightarrow v(x, 0) = \phi(x) - U(x) = \bar{\phi}(x)$$

$$\psi(x) = v_t(x, 0) \Rightarrow v_t(x, 0) = \psi(x) = \bar{\psi}(x)$$

والشروط الحديثة الصغرية (3)، (4)، (5)



Date : / /

Subject:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_1 + v_1(0, t) \Rightarrow v_1(0, t) = 0 \\ u_2 &= u_2 + v_2(l, t) \Rightarrow v_2(l, t) = 0 \end{aligned} \right\}$$

وبالتالي حد الحالة الحرة يعطى بالشكل:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{u}(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \bar{u}(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

تحديد الدالة  $u(x)$  أي حل المعادلة (5).

المعادلة في (5) تكتب بالشكل

$$u''(x) = -\frac{1}{a^2} f_0(x)$$

تكامل

$$u'(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x f_0(\xi) d\xi + C_1$$

تكامل مرة ثانية:

$$u(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \left( \int_0^{\xi} f_0(\xi) d\xi \right) d\xi + C_1 x + C_2 a$$

هذا الشرط المتوافقة وهذا عبارة الحل العام

$$\boxed{u_1 = C_2}$$

$$u_2 = -\frac{1}{a^2} \int_0^l \int_0^{\xi} f_0(\xi) d\xi d\xi + C_1 l + u_1$$

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{l} + \frac{1}{a^2 l} \int_0^l \int_0^{\xi} f_0(\xi) d\xi d\xi$$

نحل  $C_1, C_2$  بما يلي وهذا في عبارة الحل العام



Date : / /

Subject:

$$U(x) = U_1 + \frac{x}{l} (U_2 - U_1) + \frac{x}{a^2 l} \int_0^l \int_0^x f_0(\xi) d\xi dx$$

$$- \frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^l f_0(\xi) d\xi dx$$

**حالة خاصة:** إذا كانت الدالة  $f_0(x) = A$  صيغ مقدار ثابت في هذه الحالة سوف نجد أن الدالة  $U(x)$  تصبح المعادلة:

$$\Delta U + A = 0$$

$$U(0) = U_1, U(l) = U_2$$

$$U'' = -\frac{1}{a^2} A \Rightarrow U' = -\frac{A}{a^2} x + C_1$$

$$U = -\frac{A}{2a^2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$U_1 = C_2$$

$$U_2 = -\frac{A l^2}{2a^2} + C_1 l + C_2 \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{U_2 - U_1}{l} + \frac{A l}{2a^2}$$

$$U(x) = -\frac{A}{2a^2} x^2 + \left( \frac{U_2 - U_1}{l} + \frac{A l}{2a^2} \right) x + U_1$$

**أوجد حل المعادلة:**

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}; 0 < x < l \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = A \sin \omega t, t \geq 0 \quad (3)$$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t)$$



Date : / /

Subject:

$$U(x,t) = M_1(t) + \frac{x}{\ell} (M_2(t) - M_1(t))$$

$$= 0 + \frac{x}{\ell} (A \sin \omega t - 0) = \frac{x}{\ell} A \sin \omega t$$

$$U(x,t) = \frac{A}{\ell} x \sin \omega t$$

$$U(x,t) = \frac{A}{\ell} x \sin \omega t + v(x,t) \quad (u)$$

فنتحقق من أن النسبة  $U$  و  $x$  متناسبة بالنسبة لـ  $x^2$  ونبدل في الحل العام

مثال: أوجد حل المعادلة:

$$U_{tt} = U_{xx} + 2t, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (1)$$

والمحقق الشروط الابتدائية (2)  $U(x,0) = 0, U_t(x,0) = x, 0 < x < 1$

الشروط الحدية (3)  $U(0,t) = 0, U_x(1,t) = t, t > 0$

الحل: سوف نبحث عن الحل من الشكل:

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

$$U(x,t) = M_1(t) + x, M_2(t) = x, t \quad \text{علماً أن}$$

$$U(x,t) = x \cdot t + v(x,t) \quad (u)$$

ننتق  $u$  و  $t$  متناسبة بالنسبة لـ  $x$  و  $t$  متناسبة بالنسبة لـ  $x$ :

$$u_t = x + v_t(x,t) \quad (u)$$

$$u_{tt} = v_{tt}$$

$$u_x = t + v_x$$

$$u_{xx} = v_{xx}$$

نبدل في المعادلة

$$v_{tt} = v_{xx} + 2t \quad (5)$$

والدالة  $v(x,t)$  تحقق الشروط الابتدائية الجديدة الأسيّة (2) (4)

$$v = 0 + v(x,t) \Rightarrow v(x,0) = 0$$

$$x = x + v_x(x,0) \Rightarrow v_t(x,0) = 0$$



Date : / /

Subject:

الدالة  $u(x, t)$  تحقق الشروط الابتدائية الصغرى

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (6)$$

وأيضا الدالة  $u(x, t)$  تحقق الشروط الحدية الصغرى

$$u(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (7)$$

وبالتالي حل المسألة (5), (6), (7) عبارة عن معادلات ذبذبات الوتر غير

المقابلة بشروط صغرى صغرى صغرى صغرى

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos \lambda_n \cdot a \cdot t + D_n \sin \lambda_n \cdot a \cdot t) \sin \lambda_n x$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x$$

$$\lambda_n = (n\pi + \frac{\pi}{2}) \quad \text{حيث}$$

حيث أن الشروط الابتدائية صغرى فإن

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin \lambda_n x$$

$$C_n = 0, \quad D_n = 0 \quad \text{وذلك لأن}$$

$$T_n(t) = \frac{1}{\lambda_n \cdot a} \int_0^t \sin(\lambda_n \cdot a(t - \tau)) f_n(\tau) d\tau$$

$$f=1, \quad a=1$$

حيث

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi, t) \sin \lambda_n \xi d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \xi t \sin \lambda_n \xi d\xi$$

$$= ut \left[ -\frac{1}{\lambda_n} \cos \lambda_n \xi \right]_0^{\ell} =$$

$$f_n(t) = \frac{-ut}{\lambda_n} (\cos \lambda_n - 1) = \frac{ut}{\lambda_n}$$

$$\cos \lambda_n = \cos (n\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(n\pi) \cos(\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi) \quad \text{حيث } \sin(n\pi) = 0$$



Date : / /

Subject:

$$T_n(t) = \frac{1}{\lambda n} \int_0^t \sin(\lambda n(t-\tau)) \frac{u\tau}{\lambda n} d\tau$$

$$= \frac{u}{(\lambda n)^2} \int_0^t \tau \sin(\lambda n t - \lambda n \tau) d\tau$$

$$u = \frac{1}{\lambda n} \cos(\lambda n t - \lambda n \tau)$$

$$= \frac{u}{(\lambda n)^2} \left[ \frac{1}{\lambda n} \cos(\lambda n t + \lambda n \tau) \tau \int_0^t - \frac{1}{\lambda n} \int_0^t \cos$$

$$(\lambda n t - \lambda n \tau) d\tau.$$

أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = u u_{xx} \quad 0 < u \leq 1 \quad \sin 2t + \sin 2x \quad (1)$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 2 \quad (2) \quad \text{والتي تحقق للشروط الابتدائية}$$

$$u(0,t) = \sin 2t, \quad u(\pi, t) = \sin 2t \quad (3) \quad \text{الشروط الحدية}$$

سوف نبحث عن الحل في الشكل

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

$$U(x,t) = M_1(t) + \frac{x}{\ell} (M_2(t) - M_1(t))$$

$$U(x,t) = \sin 2t$$

$$U(x,t) = \sin 2t + v(x,t) \quad (4)$$

فنتحقق من شروط البداية والحدود

$$u_t = 2 \cos 2t + v_t$$

$$u_{tt} = -u \sin 2t + v_{tt}$$

$$u_x = v_x$$

$$u_{xx} = v_{xx}$$



Date : / /

Subject:

$$-u \sin 2t + v t t = u v x x - u \sin 2t + \sin 2x$$

$$v t t = u v x x + \sin 2x \quad (5)$$

والدالة  $v(x, t)$  تحقق الشروط الابتدائية (2) و (4)

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= \overset{\sin(0)}{0} + v(x, 0) \Rightarrow v(x, 0) = \sin x \\ 2 &= 2(1) + v_t(x, 0) \Rightarrow 2 + 2 + v_t(x, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$v(0, t) = \sin x, v_t(x, 0) = 0 \quad (6)$$

والدالة  $v(x, t)$  تحقق الشروط الحدية الصغرى

$$v(0, t) = 0, v(\pi, t) = 0 \quad (7)$$

حل المسألة الحدية الجديدة (5), (6), (7) يعطى بالشكل

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right] \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$* C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \xi \cdot \sin n\xi d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n-1)\xi - \cos(n+1)\xi] d\xi$$

$$C_n = \frac{-1}{\pi} \left[ \frac{1}{n-1} \sin(n-1)\xi - \frac{1}{n+1} \sin(n+1)\xi \right]_0^{\pi} = 0 \quad n \neq 1$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \xi d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \xi \Big|_0^{\pi} = 1 \Rightarrow C_n = \begin{cases} 0; & n \neq 1 \\ 1; & n = 1 \end{cases}$$



Date : / /

- 14 -

Subject:

$$\psi(x)=0: \quad \text{و } \partial_n = 0$$

$$T_n(t) = \frac{1}{n\pi a} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi a}{\ell}(t-\tau)\right) f_n(\tau) d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin nx \, dx$$

لأن  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$= 0; \quad n \neq 2$$

إذاً  $n = 2$  حالة خاصة

$$n=2 \Rightarrow f_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 2x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot x \Big|_0^{\pi} = 1$$

و  $n \neq 2$

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & n=2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$

$$T_n(t) = 0, \quad n \neq 2$$

وبالتالي

$$T_n(t) = 0 \quad \text{و } f_n(\tau) = 0 \quad \text{و } \tau \in \mathbb{R}$$

$$n=2: \quad T_2(t) = \frac{1}{\ell} \int_0^t \sin(u t - u \tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{u} \left[ \frac{1}{u} \cos(ut - u\tau) \right]_0^t$$

$$T_2(t) = \frac{1}{16} (1 - \cos ut)$$



-18-

Date :     /     /

Subject:

$$\phi(x,t) = \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16} (1 - \cos 4t) \sin 2x$$

$$u(x,t) = \sin 2t + \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16} (1 - \cos 4t) \sin 2x$$